

MATURA 2012

Powtórka do matury z matematyki

Część V: Ciągi liczbowe
ODPOWIEDZI

Organizatorzy: MatmaNa6.pl, naszemiasto.pl

Witaj,

otrzymałeś już piątą z dziesięciu części materiałów powtórkowych do matury z matematyki. Tutaj znajdziesz rozwiązania udostępnionych zadań z działu ciągu liczbowe. W każdy poniedziałek pod adresem <http://naszemiasto.pl> będą dostępne kolejne części powtórki.

Materiały pomocne przy rozwiązywaniu zadań znajdziesz na http://matmana6.pl/tablice_matematyczne

Powodzenia,

Redaktorzy portalu MatmaNa6.pl

Dziennikarze naszemiasto.pl

Ciągi liczbowe

Zadanie 1:

Jeżeli liczby $1, 5, m$ w podanej kolejności tworzą ciąg geometryczny, to

a) $m=9$

b) 16

c) 20

d) $m=25$

Rozwiązanie:

Prawidłowa odpowiedź: d)

Skoro liczby $1, 5, m$ tworzą ciąg geometryczny, to $1 \cdot m = 5^2$, czyli $m = 25$.

Zadanie 2:

Ciąg (a_n) jest określony wzorem $a_n = 4n^2 + 3$. Czwarty wyraz tego ciągu jest równy:

a) 12

b) 16

c) 67

d) 72

Rozwiązanie:

Prawidłowa odpowiedź: c)

$$a_4 = 4 \cdot 4^2 + 3 = 4 \cdot 16 + 3 = 67$$

Zadanie 3:

Dany jest ciąg geometryczny (c_n) . Jeżeli $c_n = 23^{n-15}$, to iloraz tego ciągu jest równy:

a) 23^{-1}

b) 23^{-15}

c) 23

d) 23^{15}

Rozwiązanie:

Prawidłowa odpowiedź: c)

$$q = \frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{23^{n+1-15}}{23^{n-15}} = \frac{23^{n-14}}{23^{n-15}} = 23^{n-14-(n-15)} = 23$$

Zadanie 4:

Ciąg (a_n) jest arytmetyczny. Różnica tego ciągu wynosi $r=4$, a jego pierwszym wyrazem jest $a_1=3$. n -ty wyraz ciągu (a_n) określony jest wzorem:

a) $2n+1$

b) $4n-1$

c) $3n+4$

d) $3n-1$

Rozwiązanie:

Prawidłowa odpowiedź: b)

$$a_n = 3 + (n-1) \cdot 4$$

$$a_n = 3 + 4n - 4$$

$$a_n = 4n - 1$$

Zadanie 5:

Ciąg (a_n) jest określony wzorem $a_n = \frac{n+2}{n+6}$. Który wyraz tego ciągu jest równy

$$\frac{3}{5} ?$$

Rozwiązanie:

$$\frac{n+2}{n+6} = \frac{3}{5}$$

$$5(n+2) = 3(n+6)$$

$$5n + 10 = 3n + 18$$

$$2n = 8$$

$$n = 4$$

Czwarty wyraz ciągu (a_n) jest równy $\frac{3}{5}$.

Zadanie 6:

Suma ciągu geometrycznego dana jest wzorem ogólnym $S_n = 3(2^n - 1)$. Wyznacz iloraz tego ciągu.

Rozwiązanie:

$$a_1 = S_1 = 3$$

$$a_2 = S_2 - S_1 = 9 - 3 = 6$$

$$a_2 = a_1 \cdot q$$

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{6}{3} = 2$$

Zadanie 7:

Oblicz sumę wszystkich liczb naturalnych od 21 do 81.

Rozwiązanie:

Sumę liczb naturalnych od 21 do 81 obliczamy jako sumę ciągu arytmetycznego o różnicy 1. Wszystkich wyrazów jest $n=61$.

$$S_{61} = \frac{(21+81) \cdot 61}{2} = 3111$$

Zadanie 8:

Wykaż, że jeżeli (b_n) jest ciągiem arytmetycznym, to $b_{n+1} = \frac{b_n + b_{n+2}}{2}$.

Rozwiązanie:

Ponieważ (b_n) jest ciągiem arytmetycznym to:

$$b_n = a_1 + (n-1) \cdot r,$$

$$b_{n+1} = a_1 + (n+1-1) \cdot r = a_1 + n \cdot r,$$

$$b_{n+2} = a_1 + (n+2-1) \cdot r = a_1 + (n+1) \cdot r.$$

$$\frac{b_n + b_{n+2}}{2} = \frac{a_1 + (n-1)r + a_1 + (n+1)r}{2} = \frac{2a_1 + nr - r + nr + r}{2} = a_1 + nr = b_{n+1}$$

Zadanie 9:

Znajdź trzy takie liczby, które wstawione między 4 oraz 16 utworzą wraz z nimi ciąg arytmetyczny.

Rozwiązanie:

Znajdujemy takie a_2, a_3, a_4 , aby liczby 4, $a_2, a_3, a_4, 16$ tworzyły ciąg arytmetyczny.

$$a_n = 4 + (n - 1)r$$

Ponieważ $a_5 = 16$, to otrzymujemy:

$$16 = 4 + (5 - 1)r$$

$$16 = 4 + 4r$$

$$12 = 4r$$

$$r = 3$$

Otrzymujemy ostatecznie wzór na n -ty wyraz szukanego ciągu:

$$a_n = 4 + 3(n - 1) = 3n + 1$$

Na podstawie wzoru ogólnego obliczamy a_2, a_3, a_4 .

$$a_2 = 3 \cdot 2 + 1 = 7$$

$$a_3 = 3 \cdot 3 + 1 = 10$$

$$a_4 = 3 \cdot 4 + 1 = 13$$

Zadanie 10:

Ciąg (a_n) $n \in N$ opisany jest rekurencyjnie:

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = a_n(n+1) \end{cases}$$

Znajdź wzór ogólny ciągu (a_n) .

Rozwiązanie:

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = a_n(n+1) \end{cases}$$

Aby znaleźć wzór ogólny ciągu (a_n) wypisujemy kilka początkowych wyrazów tego ciągu.

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = a_1(1+1) = 1 \cdot 2$$

$$a_3 = a_2(2+1) = 1 \cdot 2 \cdot 3$$

$$a_4 = a_3(3+1) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$$

$$a_5 = a_4(4+1) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$$

Kolejne wyrazy ciągu, powstają poprzez pomnożenie poprzedniego iloczynu przez kolejną liczbę naturalną. Iloczyn kolejnych liczb naturalnych od 1 do n to $n!$. Szukany wzór ogólny ciągu (a_n) to

$$a_n = n!.$$

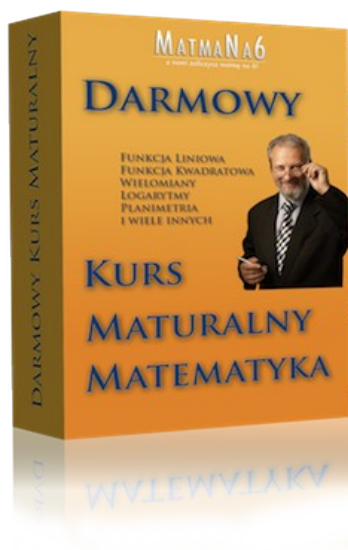
Kolejna porcja zadań, tym razem z działu Trygonometria dostępna będzie w poniedziałek pod adresem

<http://www.naszemiasto.pl>

Szczegółowe wyjaśnienia zagadnień z działu ciągi liczbowe, które pomogą Ci w rozwiązaniu powyższych zadań znajdziesz na stronie

http://matmana6.pl/tablice_matematyczne/liceum

Wszelkie uwagi, komentarze na temat powtórki maturalnej można kierować na adres pytania@matmana6.pl.



Redaktorzy serwisu MatmaNa6.pl prowadzą Darmowy Kurs Maturalny z matematyki na poziomie podstawowym i rozszerzonym, który składa się z ponad 70 lekcji. Każda lekcja zawiera:

1. omówienie wybranego zagadnienia,
2. ćwiczenia interaktywne,
3. przykłady zadań,
4. zadania maturalne do samodzielnego rozwiązania,
5. rozwiązania zadań z poprzedniej lekcji.

[Kliknij aby zapisać się na kurs.](#)