# **logo.png**

# **I Ciągi liczbowe**

1. Podstawowe definicje, ciąg liczbowy w ujęciu ogólnym ------------------------------------------------------------- **str. 2**
   1. wybrane zadania otwarte ----------------------------------------------------------------------------------- str. 3
   2. wybrane zadania zamknięte -------------------------------------------------------------------------------- str. 5
2. Ciąg arytmetyczny --------------------------------------------------------------------------------------------------------- **str. 6**
   1. wybrane zadania otwarte ----------------------------------------------------------------------------------- str. 7
   2. wybrane zadania zamknięte -------------------------------------------------------------------------------- str. 9
3. Ciąg geometryczny ------------------------------------------------------------------------------------------------------- **str. 10**
   1. wybrane zadania otwarte ---------------------------------------------------------------------------------- str. 11
   2. wybrane zadania zamknięte ------------------------------------------------------------------------------- str. 14
4. Wybrane zadania maturalne dotyczące ciągów liczbowych (ciąg arytmetyczny i geometryczny łącznie) --- **str. 15**

|  |
| --- |
| Ciągiem liczbowym (nieskończonym) nazywamy każdą funkcję o wartościach w zbiorze liczb rzeczywistych określoną na zbiorze liczb naturalnych ( ).   * liczby przyporządkowane kolejnym liczbom naturalnym nazywamy wyrazami ciągu i oznaczamy symbolem ***an,*** gdzie; * ciągi liczbowe określa się za pomocą wzoru ogólnego lub za pomocą wzoru rekurencyjnego[[1]](#footnote-1)\*; * wykresem ciągu jest zbiór punków spełniających warunki danego ciągu umieszczonych w układzie współrzędnych.   Do podstawowych cech każdego ciągu liczbowego zaliczamy:   1. monotoniczność ciągu; 2. ograniczoność ciągu; 3. posiadanie granicy.   Poprzez monotoniczność ciągu rozumiemy określenie, czy ciąg jest:   * rosnący * malejący * stały (wszystkie wyrazy ciągu maja taką samą wartość).   *Ze względu na monotoniczność ciągu, dzielimy ciągi na:*   1. ***ciągi zbieżne*** *– posiadające granicę skończoną;* 2. ***ciągi rozbieżne*** *– do plus lub minus nieskończoności,*   *- nie posiadające granicy.*  Poprzez ograniczoność ciągu należy rozumieć takie wartości do których zbliżają się bezwzględne wartości kolejnych wyrazów ciągu, np.  gdzie *M = 3* (każdy wyraz ciągu jest co do wartości bezwzględnej mniejszy od liczby *M*).  Szczególnymi rodzajami ciągów są ciągi:   * **arytmetyczne** * **geometryczne.** |

* 1. **Ciągi liczbowe w ujęciu ogólnym**

**a) wybrane zadania otwarte:**

**Zadanie 1**

Wyrazy ciągu określone są wzorem: Wyznacz: 

## Zadanie 2

Ciąg określony jest w sposób rekurencyjny (indukcyjny):  Wyznacz trzy pierwsze wyrazy ciągu.

## Zadanie 3

Podaj wzór ogólny ciągu, którego wyrazami są:

* 1. 2; 4; 6; 8; 10.....
  2. 0,7; 0,07; 0,007 ....
  3. –1; 1; -1; 1; ...

d)\* 

## Zadanie 4

Na podstawie definicji zbadaj monotoniczność poniższych ciągów:

a)  b)\* ; c)\* 

## Zadanie 5

Ciąg *an*jest określony wzorem ogólnym:

a) ; b)\* 

1. wyznacz liczbę dodatnich wyrazów ciągu;
2. zbadaj monotoniczność ciągu.

## Zadanie 6\*

Wyznacz wzór na *n*-ty wyraz ciągu, którego suma *n* początkowych wyrazów wyraża się wzorem: 

**Zadanie 7**

Dany jest ciąg: .

Wyznacz:

1. pierwszych pięć jego wyrazów
2. wykres ciągu dla 
3. na podstawie definicji określ monotoniczność ciągu.

## Zadanie 8

Suma trzech pierwszych wyrazów ciągu:  jest równa 22, a wyraz czwarty jest o 3 mniejszy od drugiego. Oblicz *a* i *b* oraz wyznacz wzór ogólny ciągu a następnie wykreśl go dla 

## Zadanie 9

Które wyrazy ciągu:  spełniają nierówność: 

## Zadanie 10\*

Dla jakich wartości parametru *a* ciąg określony wzorem:  jest rosnący?

## Zadanie 11\*

Dany jest ciąg : , którego najmniejszym wyrazem jest liczba: -5. Oblicz *a* oraz wyznacz wszystkie wyrazy ujemne tego ciągu.

## Zadanie 12

Sumę 100 początkowych wyrazów ciągu (*an*), określonego wzorem dla  można obliczyć w następujący sposób:



Przeprowadzając analogiczne rozumowanie, oblicz sumę 100 początkowych wyrazów ciągu 

1. **wybrane zadania zamknięte**

## Zadanie 1

Dany jest ciąg określony wzorem:  Wówczas

**A.**   **B.**  **C.**   **D.** 

## Zadanie 2

Ile wyrazów ujemnych ma ciąg (*an)* określony wzorem: dla 

**A.**   **B.**  **C.**   **D.** 

**2. Ciąg arytmetyczny**

|  |
| --- |
| Ciąg liczbowy nazywamy ***ciągiem arytmetycznym***, jeżeli każdy następny wyraz tego ciągu powstaje poprzez dodanie do wyrazu poprzedniego stałej liczby ***r*** zwanej różnicą ciągu.  Z definicji wynika, że dla każdej dowolnej liczby naturalnej *n* prawdziwa jest relacja:  Można mówić o ciągu arytmetycznym jedynie wtedy, gdy ma on co najmniej trzy wyrazy.  ***Własności ciągu arytmetycznego:***   1. Ciąg arytmetyczny jest:    * rosnący, gdy ***r > 0;***    * stały, gdy ***r = 0;***    * malejący, gdy ***r = 0.*** 2. W ciągu arytmetycznym każdy wyraz, oprócz pierwszego i ostatniego jest średnią arytmetyczną wyrazów bezpośrednio z nim sąsiadujących, tzn. dla  prawdziwy jest wzór: 3. Wzór na *n-ty* wyraz ciągu arytmetycznego: 4. Wzór na sumę *n-początkowych* wyrazów ciągu arytmetycznego: .   Korzystając z powyższych definicji można zauważyć, że:   * + 1. ciąg liczb naturalnych: *1, 2, 3, ....n* jest ciągiem arytmetycznym o różnicy *r = 1*, i sumę *n-początkowych* liczb naturalnych można wyznaczyć ze wzoru: ;     2. ciąg liczb nieparzystych: *1, 3, 5,...,2n – 1,...* jest ciągiem arytmetycznym o różnicy *r = 2*, i sumę *n-początkowych* liczb nieparzystych można wyznaczyć ze wzoru:     3. ciąg liczb parzystych: *2, 4, 6, ... ,2n, ...* jest ciągiem arytmetycznym o różnicy *r = 2*, i sumę *n-początkowych* liczb parzystych wyznaczyć ze wzoru: |

1. **wybrane zadania otwarte**

**Zadanie 1**

Liczby *x*, *y*, 19 w podanej kolejności tworzą ciąg arytmetyczny, przy czym *x* + *y* = 8. Oblicz *x* i *y*.

**Zadanie 2**

Ciąg liczbowy  jest określony wzorem  Uzasadnij, że dany ciąg jest ciągiem arytmetycznym.

## Zadanie 3\*

Udowodnij, że jeśli różne liczby  tworzą ciąg arytmetyczny, to liczby  też tworzą ciąg arytmetyczny.

## Zadanie 4

W ciągu arytmetycznym składającym się z dziewięciu wyrazów suma trzech pierwszych wyrazów równa się 30, a suma trzech następnych wynosi 84. Oblicz sumę trzech ostatnich wyrazów tego ciągu.

## Zadanie 5

Wyznacz pierwszy wyraz i różnicę ciągu arytmetycznego, jeśli:

*i* 

## Zadanie 6

Liczby 55; 51; 47 są trzema początkowymi wyrazami ciągu arytmetycznego (a n).

1. oblicz 16 –ty wyraz tego ciągu;
2. podaj wzór na n-ty wyraz tego ciągu;
3. oblicz sumę dwudziestu początkowych wyrazów tego ciągu.

# **Zadanie 7**

Liczby: ( w podanej kolejności) są trzema początkowymi wyrazami ciągu arytmetycznego o wyrazach całkowitych.

1. oblicz x;
2. wyznacz podane wyrazy;
3. podaj wzór na n-ty wyraz tego ciągu;
4. wykreśl ten ciąg dla 

# **Zadanie 8**

Suma szóstego i szesnastego wyrazu ciągu arytmetycznego (a n) jest równa 5, a iloczyn wyrazu ósmego i dwunastego równy jest 3. Wyznacz wzór na wyraz ogólny ciągu (a n). Zbadaj monotoniczność ciągu na podstawie definicji.

## Zadanie 9

Uczeń przeczytał książkę liczącą 256 stron w ciągu 10 dni, przy czym każdego dnia czytał o pewną stałą liczbę stron więcej niż dnia poprzedniego. W piątym dniu przeczytał 24 strony. Oblicz, ile stron uczeń przeczytał w pierwszym, a ile w ósmym dniu.

## Zadanie 10

Pierwszy wyraz ciągu arytmetycznego jest równy 3, czwarty wyraz tego ciągu jest równy 15. Oblicz sumę sześciu początkowych wyrazów tego ciągu.

## Zadanie 11

Długości boków trójkąta prostokątnego tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy 1. Oblicz długość przeciwprostokątnej tego trójkąta.

## Zadanie 12

Znajdź sumę liczb naturalnych nieparzystych mniejszych od 100, które nie są podzielne przez 5.

**Zadanie 13**

Kino czynne jest całą dobę. Za oglądanie pierwszego filmu trzeba zapłacić 15 zł, a za oglądanie każdego następnego o 2 zł mniej niż poprzedniego. Czy 100 zł wystarczy Tobie, aby obejrzeć 8 filmów?

**Zadanie 14**

Rozwiąż równanie: -4 – 1 + 2 + 5 + ... + x = 490

**Zadanie 15**

Liczby: 3x + 15; 12; 27x – 1 są odpowiednio pierwszym, trzecim i piątym wyrazem ciągu arytmetycznego. Wyznacz x.

**Zadanie 16**

Oblicz sumę wszystkich liczb naturalnych dwucyfrowych, które przy dzieleniu przez 4 dają resztę 3.

1. **wybrane zadania zamknięte**

## Zadanie 1

W ciągu arytmetycznym trzeci wyraz jest równy 14, a jedenasty jest równy 34. Różnica tego ciągu jest równa:

**A.** 9 **B.**  **C.** 2 **D.** 

**Zadanie 2**

Dany jest nieskończony rosnący ciąg arytmetyczny  o wyrazach dodatnich. Wtedy

**A.**   **B.**  **C.**   **D.** 

**Zadanie 3**

W ciągu arytmetycznym  oraz  Wtedy suma  jest równa:

**A.** 95 **B.** 200 **C.** 230 **D.** 100

## Zadanie 4

W ciągu arytmetycznym  oraz  Wtedy  jest równy:

**A.** 13 **B.** 0 **C.** -13 **D.** –26

## Zadanie 5

Miary kątów czworokąta tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy 200. Najmniejszy kąt tego czworokąta ma miarę:

**A.** 400 **B.** 500 **C.** 600 **D.** 700

**3. Ciąg geometryczny**

|  |
| --- |
| Ciąg liczbowy  nazywamy ***ciągiem geometrycznym***, jeżeli każdy następny wyraz tego ciągu powstaje przez pomnożenie wyrazu poprzedniego przez pewną liczbę ***q***, zwaną ***ilorazem***, czyli prawdziwa jest zależność:  O ciągu geometrycznym mówimy, gdy ma on co najmniej trzy wyrazy.  ***Własności ciągu geometrycznego***:   1. między kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego zachodzi związek:   (dla wszystkich dodatnich wyrazów ciągu można dostrzec, że: .   1. monotoniczność ciągu geometrycznego:    * ciąg jest rosnący, gdy    * ciąg jest malejący, gdy    * ciąg jest stały, gdy *q = 1* lub . 2. wzór na n-ty wyraz ciągu geometrycznego: ; wzór na sumę ciągu geometrycznego: 3. ciąg geometryczny jest zbieżny jeśli:   -  - *q = 1* (ciąg stały). Podstawowe definicje dotyczące wyznaczania granic ciągu liczbowego(\*) Mówimy, że ciąg **ma granicę *g*,** jeżeli w każdym przedziale , leżą prawie wszystkie wyrazy ciągu począwszy od  Wyznaczając granicę ciągu liczbowego, musimy pamiętać o tym, by omijać (eliminować) symbole nieoznaczoności, tj.: |

1. **wybrane zadania otwarte**

## Zadanie 1

Zawodnik wspinając się na maszt, za pokonanie pierwszych dwóch metrów otrzymał 10 pkt. Za pokonanie następnego metra otrzymał 30 pkt, a za pokonanie każdego następnego otrzymywał trzy razy więcej niż za pokonanie poprzedniego. W sumie zawodnik otrzymał 3640 pkt. Ile metrów pokonał?

## Zadanie 2

Cyfry pewnej liczby trzycyfrowej x tworzą w podanej kolejności: cyfra setek, cyfra dziesiątek, cyfra jedności, trzywyrazowy ciąg geometryczny. Jeśli od liczby x odejmiemy liczbę trzycyfrową zapisaną za pomocą tych samych cyfr, ale w kolejnosci odwrotnej, to otrzymamy 594. Znajdź liczbę x.

## Zadanie 3

Miedzy liczby:  i 4 wpisz takie dwie różne od zera liczby, aby wraz z danymi w podanej kolejności tworzyły ciąg geometryczny.

## Zadanie 4

Znajdź iloraz ciągu geometrycznego, w którym: 

## Zadanie 5

Wyznacz ogólny wzór ciągu geometrycznego, w którym: . Który wyraz tego ciągu jest równy 39366 i ile wynosi suma jego początkowych ośmiu wyrazów?

## Zadanie 6\*

Dla jakich *x* istnieją równocześnie sumy S1 i S2 nieskończonych ciągów geometrycznych:; .

Dla jakich *x* sumy te są równe?

## Zadanie 7

Liczby 16, 8 w podanej kolejności są trzema początkowymi wyrazami nieskończonego ciągu geometrycznego (). Oblicz:

1. iloraz *q* tego ciągu oraz sumę jego wszystkich wyrazów,
2. podaj wzór na wyraz ogólny ciągu ().

## Zadanie 8

Wyznacz ciąg geometryczny (), w którym  i 

## Zadanie 9

Rozwiąż równanie: 

## Zadanie 10

Liczby: x-3, 2x, 5x +18 w podanej kolejności są szóstym, siódmym i ósmym wyrazem ciągu geometrycznego (). Oblicz:

1. niewiadomą x,
2. iloraz *q* ciągu () oraz podaj jego pierwszy wyraz.

## Zadanie 11

Między liczby 16 i 81 staw trzy liczby tak, by wraz z podanymi liczbami tworzyły ciąg geometryczny.

## Zadanie 12

Dany jest ciąg geometryczny o wyrazie ogólnym: . Wyznacz trzeci i szósty wyraz tego ciągu oraz wykreśl go dla .

## Zadanie 13

Wyznacz  jeśli:  oraz .

## Zadanie 14

Długość, szerokość i głębokość prostopadłościennego wykopu tworzą ciąg geometryczny o ilorazie równym 2. Oblicz wymiary tego wykopu wiedząc, że objętość dołu wynosi 8000 m3.

## Zadanie 15

Wyznacz wzór ogólny ciągu geometrycznego malejącego mając dane: 

**Zadanie 16**

Sprawdź, czy ciąg o wzorze ogólnym:  jest cięgiem geometrycznym.

## Zadanie 17\*

Wyznacz granicę poniższych ciągów:

a) ;

b) ;

c) ;

d) ;

e) .

## Zadanie 18

Dany jest rosnący ciąg geometryczny, w którym.

1. Wyznacz iloraz tego ciągu.
2. Zapisz wzór, na podstawie którego można obliczyć wyraz *an*, dla każdej liczby naturalnej *n* ≥1.
3. Oblicz wyraz 

## Zadanie 19

Wykonaj działanie: 

## Zadanie 20\*

O ciągu *xn* dla  wiadomo, że:

1. ciąg *an* określony jest wzorem:  dla  jest geometryczny o ilorazie q = 27,
2. =145.

Oblicz *x1.*

1. **wybrane zadania zamknięte**

**Zadanie 1**

Dany jest nieskończony ciąg geometryczny , w którym  i . Wtedy

**A.**   **B.**  **C.**   **D.** 

## Zadanie 2

W ciągu geometrycznym dane są:  Wtedy

**A.**   **B.**  **C.**   **D.** 

## Zadanie 3

W ciągu geometrycznym dane są:  Iloraz tego ciągu jest równy:

**A.**  8 **B.** 2 **C.**   **D.** 

## Zadanie 4

W ciągu geometrycznym dane są:  Iloraz tego ciągu jest równy:

**A.**  12 **B.** -12 **C.**   **D.** 

**Zadanie 5**

W ciągu geometrycznym dane są:  Wtedy  wynosi:

**A.**  -18 **B.** 0 **C.**  4,5 **D.** 144

**Zadanie 6**

W ciągu geometrycznym dane są:  Wtedy  wynosi:

**A.**  10 **B.** 20 **C.**  75 **D.** 45

**4. Wybrane zadania maturalne dotyczące ciągów liczbowych (ciąg arytmetyczny i geometryczny łącznie)**

## Zadanie 1

Ciąg (9; x; 19) jest arytmetyczny, a ciąg (x; 42; y; z) jest geometryczny. Wyznacz oba ciągi oraz podaj interpretację graficzną zadania.

**Zadanie 2\***

Trzy liczby tworzą ciąg geometryczny. Jeżeli do drugiej liczby dodamy 8, to ciąg ten zmieni się w arytmetyczny. Jeżeli zaś do ostatniej liczby nowego ciągu arytmetycznego dodamy 64, to tak otrzymany ciąg będzie znów geometryczny. Znajdź te liczby uwzględniając wszystkie możliwości.

## Zadanie 3\*

Wykaż, że jeśli liczby: x; y; z tworzą w tej kolejności ciąg arytmetyczny, to liczby:  tworzą w tej kolejności ciąg geometryczny.

## Zadanie 4

Trzy liczby, z których każda jest różna od zera i których suma jest równa 35, tworzą rosnący ciąg geometryczny. Te same liczby w tej samej kolejności są pierwszym, drugim i czwartym wyrazem ciągu arytmetycznego. Wyznacz wzory ogólne obu ciągów.

## Zadanie 5

Dany jest ciąg o wyrazie ogólnym:  Na podstawie odpowiednich definicji

1. zbadaj, czy jest to ciąg arytmetyczny,
2. zbadaj, czy jest to ciąg geometryczny,
3. zbadaj monotoniczność ciągu,
4. narysuj wykres ciągu (zaznacz 4 początkowe wyrazy).

## Zadanie 6

Trzy liczby: x; y; 12 są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego, natomiast liczby: x, y, 9 sa kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego. Wyznacz wzory ogólne obu ciągów.

## Zadanie 8\*

Trzy liczby, których suma wynosi 78, są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego. Liczby te są również pierwszym, trzecim i dziewiątym wyrazem ciągu arytmetycznego. Jakie to liczby?

1. \* rekurencja – sposób definiowania procedur i funkcji polegający na umieszczaniu w treści procedury odwołań do tej samej procedury, rekurencyjny wzór jest wzorem wyrażającym ogólny (n-ty) wyraz ciągu przez wyrazy go poprzedzające. [↑](#footnote-ref-1)